Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica
Area de Ciencias Básicas y Humanidades

P.A. 2006-I
14-07-2006

Solucionario del Examen Final de Cálculo Numérico (MB535)

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

Pregunta 1

<u>Elija 4 de las 5 subpreguntas</u>:

a) Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.2x_1 + x_2x_3 + 0.3x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 - 5x_2x_3 - 2x_2^2\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0\end{aligned}$$

Condiciones iniciales $x_1(0)=0.8$, $x_2(0)=x_3(0)=0.1$ $\quad 0 \le t \le 1$, h= 0.1

Complete lo que falta en código Matlab.

```
function [dx]=xdot(t,x)


>> [         ]=ode45(                                                  ) ;
```

Solución

```
function [dx]=xdot(t,x)
% x debe ser un vector de 2x1
x(3)=1-x(2)-x(1) ;
dx=[0.2x(1)+x(2)*x(3)+0.3*x(1)*x(2); 2*x(1)*x(2)-5*x(2)*x(3)-2*x(2)^2] ;
>> [ t,x ]=ode45( 'xdot',[0:0.1:1],[0.8;0.1]) ;
```

b) Sea $y'' + \dfrac{1}{\alpha^2} y = x^2 \qquad y(0) = -2\alpha^4 + 1,\; y'(0) = 0,\; h=0.1,\; \alpha \ne 0$

Aplique un paso por el método Euler mejorado.

Solución

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\alpha^2}x_1 + t^2\end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{1}{\alpha^2}x_1 + t^2 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)}{}_E = \begin{bmatrix} -2\alpha^4 + 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1*\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\alpha^2}\left(2\alpha^4 - 1\right) \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} -2\alpha^4 + 1 \\ \dfrac{0.1}{\alpha^2}\left(2\alpha^4 - 1\right) \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} -2\alpha^4+1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.05 * \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2}\left(-2\alpha^4+1\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+\frac{0.1}{\alpha^2}\left(2\alpha^4-1\right) \\ -\frac{1}{\alpha^2}\left(\left(-2\alpha^4+1\right)+\left(-2\alpha^4+1\right)\right)+(0.1^2) \end{pmatrix} \right]$$

c) Para la integral $\int_0^1 \left(2x^3+3\right)dx$, obtener la siguiente matriz de Romberg: $R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ y determine el error de la aproximación R_{22}.

Solución

$h = 1$

$$R_{11} = \frac{h}{2}\left(f(0)+f(1)\right) = 4$$

$h = 1/2$

$$R_{21} = \frac{h}{2}\left(f(0)+2f(1/2)+f(1)\right) = \frac{29}{8} = 3.625$$

$$R_{22} = \frac{4R_{21}-R_{11}}{3} = \frac{7}{2}$$

$$Ie = \left(\frac{x^4}{2}+3x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{2}$$

$Error = 0$

d) Se desea evaluar una integral entre a y b con paso h usando la fórmula del rectángulo compuesta, complete la siguiente codificación en MATLAB.

X =...

F = fun(X);

I =...

Solución

```
X=a+h:2*h:b-h;
F=fun(X)
I=2*h*sum(F);
```

e) Se desea tabular la función $f(x) = \cos(x)e^x$ definida en $\left[-\pi,\pi\right]$ mediante puntos equiespaciados. ¿Cuántos puntos son necesarios para que al interpolar linealmente entre dos valores consecutivos el error entre la función y el interpolante no supere a 0.5?

Solución

$$\left| f(x) - P_1(x) \right| = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1) \le \frac{M}{2}\frac{h^2}{4} < 0.5$$

Tomando como caso crítico $x = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$ y $\begin{array}{c} M = max\left| f''(\xi)\right| \\ -\pi \le \xi \le \pi \end{array}$ como $f''(x) = -2\,\mathrm{sen}(x)\, e^x$

Entonces: $M = 2\, e^{\pi}$, por lo tanto $h < 0.2940 \quad N > \dfrac{2\pi}{h} \Rightarrow N = 22$

Pregunta 2

El mástil de un barco construido con una nueva aleación de aluminio tiene un área transversal de 5.65 cm^2. Se desarrollan pruebas para definir la relación entre esfuerzo (fuerza aplicada al material por unidad de área) y deformación (deflexión por unidad de longitud), cuyos resultados se muestran en la tabla:

Esfuerzo (Kg/cm^2)	506	527	562	365	703
Deformación(m)	0.002	0.0045	0.006	0.0013	0.0085

Encuentre la deformación del mástil del mástil debida a la fuerza del viento, evaluada en 2900 Kg para esto:

a) Construir la tabla de diferencias divididas
b) Realice la interpolación de Newton tomando dos, tres y cuatro puntos, de tal manera de tener el menor error posible. (Utilice 4 cifras decimales)
c) Estime el error para cada caso.

Solución

El punto de interpolación es: z = 2900/5.65 = 513.2743

Tabla de diferencias divididas

X	**F(x)**				
506	0.002				
527	0.0045	$0.1190*10^{-3}$			
562	0.006	$0.0429*10^{-3}$	$-0.1361*10^{-5}$		
365	0.0013	$0.0239*10^{-3}$	$0.0117*10^{-5}$	$-0.1048*10^{-7}$	
703	0.0085	$0.0213*10^{-3}$	$-0.0018*10^{-5}$	$-0.0077*10^{-7}$	$0.4930*10^{-10}$

Los polinomios interpolantes

$P1(x)=0.002+0.1190*10^{-3}(x-506)$ ➔ $P(z)=2.8660*10^{-3}$
$E1(x)=-0.1361*10^{-5}(x-506)(x-527)$ ➔ $E1(z)= 1.3584e-004$
$P2(x)=P1-0.1361*10^{-5}(x-506)(x-527)$ ➔ $P(z)=3.0018*10^{-3}$
$E2(x)= -0.1048*10^{-7}(x-506)(x-527)(x-562)$ ➔ $E2(z)= -5.0990e-005$
$P3(x)=P2(x)-0.1048*10^{-7}(x-506)(x-527)(x-562)$ ➔ $P(z)=2.9508*10^{-3}$
$E3(x)= 0.4930*10^{-10}(x-506)(x-527)(x-562)(x-365)$ ➔ $E3(z)= 3.5561e-005$

Pregunta 3

Un eje circular tiene un diámetro d(m) que varía con la posición axial x(m) según:

$$d = \frac{0.02\left(1 + x^2\right)}{e^x} \qquad 0 \le x \le 3$$

Una carga axial de 30000 N se aplica en un extremo del eje, cuyo módulo de elasticidad E es $2x10^{11}$ N/m^2. La elongación axial del eje es $\Delta x(m)$ y está dado por:

$$\Delta x = (P/E)\int \left(\frac{1}{A}\right)dx \quad A = \frac{\pi\ d^2}{4}$$

A = Área de la sección transversal.

a) Estime Δx aplicando la regla de Simpson 1/3 con 10 intervalos iguales.
b) Deduzca una fórmula de integración exacta para todo polinomio cuadrático de la forma: $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a\ f(-3/4) + b\ f(0) + c\ f(3/4)$.
c) Estime Δx aplicando la fórmula deducida en b) y comente las discrepancias, teniendo en cuenta que el exacto es 0.00309549.

Solución

a) Reemplazando:

$$\Delta x = \frac{30000x4}{2x10^{11}x\pi\ x0.02^2}\int_0^3 \frac{e^{2x}}{(1+x^2)^2}dx = k\int_0^3 f(x)dx = k\ Io$$

Por Simpson 1/3:

$$h = 0.3$$

$$Io = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(0.3) + 2f(0.6) + 4f(0.9) + 2f(1.2) + 4f(1.5) + 2f(1.8) + 4f(2.1) + \ldots$$
$$\Lambda\ 2f(2.4) + 4f(2.7) + f(3)]$$

$$Io = 6.48448314$$

$$\Delta x = k\ Io = 0.00309611$$

b) Considerando que será exacto para: $\{1, x, x^2\}$, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b + c = 2 \qquad a = \frac{16}{27}$$
$$\frac{-3}{4}a + \frac{3}{4}c = 0 \qquad b = \frac{22}{27}$$
$$\frac{9}{16}a + \frac{9}{16}c = \frac{2}{3} \qquad c = \frac{16}{27}$$

c) Haciendo el cambio de variable: $x = \frac{3}{2}(t+1)$

$$\int_0^3 \frac{e^{2x}}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-1}^{1}\frac{3}{2}\frac{e^{3(t+1)}}{(1+(3/2(t+1))^2)^2}dt = \int_{-1}^{1}F(t)\,dt$$

$$Io = \frac{16}{27}F\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{22}{27}F(0) + \frac{16}{27}F\left(\frac{3}{4}\right) = 6.4912$$

$$\Delta x = k\ Io = 0.00309931$$

Considerando que el valor exacto es $\Delta x = 0.00309549$,el método de Simpson resulta ligeramente más preciso.

Pregunta 4

Dado el problema de contorno

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + 2x + \cos(t) & t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x(0) = -0.3, \quad x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -0.1. & \end{cases}$$

a) Aplicando el método de las diferencias finitas, aplique con h=$\pi/6$. Debe indicar el procedimiento a seguir así como las operaciones intermedias.

b) Use el método del disparo si dispone de la siguiente información obtenida usando el método de Euler con h=$\pi/6$

So= 0.12732 Y_3(So)= 0.40922

S_1= -0.19686 $Y_3(S_1)$= -0.50624

S_2=?

$Y_3(S_2)$=?

El resultado deberá reportarlo con 4 cifras decimales.

c) Para este caso, ¿Cuál de los métodos le dará el menor error si:

x(t)= $-\dfrac{(\sin t \;\; + 3\cos t)}{10}$?. Comente su respuesta.

Solución

a) Aplicando el método de las diferencias finitas, con h=$\pi/6$. Debe indicar el procedimiento a seguir así como las operaciones intermedias.

x(0)=-0.3	?	?	x($\frac{\pi}{2}$)=-0.1
0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} = \frac{h}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) + 2h^2 x_i + h^2\cos(t)$$

$$(1+\frac{h}{2})x_{i-1} + (-2-2h^2)x_i + (1-\frac{h}{2})x_{i+1} = h^2\cos(t)$$

i=1,2 $\quad h = \dfrac{\pi}{6} \quad t_1 = \dfrac{\pi}{6} \quad t_2 = \dfrac{\pi}{3}$

$$\begin{bmatrix} -2(1+h^2) & 1-\dfrac{h}{2} \\ 1+\dfrac{h}{2} & -2(1+h^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2\cos(t_1) - \left(1+\dfrac{h}{2}\right)(-0.3) \\ h^2\cos(t_2) - \left(1-\dfrac{h}{2}\right)(-0.1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.31018 \\ -0.23635 \end{bmatrix}$$

b) Use el método del disparo si dispone de la siguiente información obtenida usando el método de Euler con h=$\pi/6$

so= 0.12732 $Y_3(so)$= 0.40922

s_1= -0.19686 $Y_3(s_1)$= -0.50624 B=-0.1

$$s2 = s_0 + (s_1 - s_0)\frac{B - Y_3(s_0)}{Y_3(s_1) - Y_3(s_0)}$$

S_2=-0.05300

Algoritmo de Euler

$$\begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(i)} + 2x_1^{(i)} + \cos t_i \end{bmatrix} \quad i=0,1,2$$

Z =

x_1 = y	x_2 = y'
-0.3	-0.053
-0.32775073510671	0.12868877513261
-0.260369450014031	0.306300134077212
-0.0999910748456075	0.455819646583687

$Y_3(S_2)$=-0.1000

El resultado con 4 cifras decimales.

c) Para este caso,¿Cual de los métodos le dará el menor error si:

x(t)= $-\frac{(\sin t + 3\cos t)}{10}$?. Comente su respuesta.

T	$y_{Diffini}$	$y_{Disparo}$	y_{Exacta}
0	-0.3	-0.3	-0.3
0.5236	-0.31018	-0.32775	-0.309807621135332
1.04720	-0.23635	-0.26037	-0.236602540378444
1.5708	-0.1	≈-0.1000	-0.1

Error	0.00037	0.0238	

Se comete mayor error con el método del disparo, esto se debe por el método usado.

Los Profesores